

מבוא משוואות דיפרנציאליות רגילות

פרק 12 - יישומים של טורי פורייה

תוכן העניינים

1. בעיות שטורם ליוביל.....1
2. משוואת החום.....3
3. משוואת הגלים.....5

בעיות שטורם ליוביל:

שאלות:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 & , \quad 0 < x < 1 \\ y'(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 & , \quad 0 < x < 1 \\ y(0) = 0 \\ y(1) + y'(1) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 & , \quad 0 < x < 1 \\ y(0) + y'(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 & , \quad 0 < x < \ell \\ y(0) = 0 \\ y'(\ell) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 & , \quad 0 < x < \pi \\ y'(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} y'' - 2y' + (1 + \lambda)y = 0 & , \quad 0 < x < 1 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

תרגילים מסכמים:

(1) מצאו פונקציות עצמיות וערכים עצמיים עבור בעיית שטורם ליוביל הבאה:

$$\begin{cases} y''(x) + \lambda y(x) = 0 & , \quad 0 < x < L \\ y(0) = y(L) = 0 \end{cases}$$

(2) מצאו פונקציות עצמיות וערכים עצמיים עבור בעיית שטורם ליוביל הבאה:

$$\begin{cases} y''(x) + \lambda y(x) = 0 & , \quad 0 < x < L \\ y'(0) = y'(L) = 0 \end{cases}$$

תשובות סופיות:

(1) פונקציות עצמיות של הבעיה: $\varphi_n(x) = \cos(n\pi x)$, $n = 1, 2, 3, \dots$

ערכים עצמיים של הבעיה: $\lambda_n = (\omega_n)^2 = (n\pi)^2$, $n = 1, 2, 3, \dots$

$$y = 0 \quad (2)$$

$$y = 0 \quad (3)$$

(4) פונקציות עצמיות של הבעיה: $\varphi_n(x) = \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2\ell}x\right)$, $n = 1, 2, 3, \dots$

ערכים עצמיים של הבעיה: $\lambda_n = (\omega_n)^2 = \left((2n+1)\frac{\pi}{2\ell}\right)^2$, $n = 1, 2, 3, \dots$

(5) פונקציות עצמיות של הבעיה: $\varphi_n(x) = \cos\frac{2n+1}{2}x$, $n = 1, 2, 3, \dots$

ערכים עצמיים של הבעיה: $\lambda_n = (\omega_n)^2 = \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2$, $n = 1, 2, 3, \dots$

(6) פונקציות עצמיות של הבעיה: $\varphi_n(x) = e^x \sin n\pi x$, $n = 1, 2, 3, \dots$

ערכים עצמיים של הבעיה: $\lambda_n = (\omega_n)^2 = (n\pi)^2$, $n = 1, 2, 3, \dots$

תרגילים מסכמים-תשובות סופיות:

$$y_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \quad n=1,2,3,\dots \quad (1)$$

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{L}\right)^2$$

$$y_n(x) = \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{L}\right)^2$$

משוואת החום:

שאלות:

(1) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת החום הבאה:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(x, 0) = \sin(x) \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$$

(2) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת החום הבאה:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(x, 0) = \frac{1}{2} + 3\sin^2(x) \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 \end{cases}$$

(3) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת החום הבאה:

$$\begin{cases} u_t = 16u & 0 < x < 3, t > 0 \\ u(x, 0) = x \\ u_x(0, t) = u_x(3, t) = 0 \end{cases}$$

(4) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת החום הבאה:

$$\begin{cases} u_t = 9u_{xx} & 0 < x < 2, t > 0 \\ u(x, 0) = 6 + 4\cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right) \\ u_x(0, t) = u_x(2, t) = 0 \end{cases}$$

(5) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת החום הבאה:

$$\begin{cases} u_t = 9u_{xx} & 0 < x < 2, t > 0 \\ u(x, 0) = x \\ u_x(0, t) = u_x(2, t) = 0 \end{cases}$$

תשובות סופיות:

$$u(x, t) = e^{-t} \sin(x) \quad (1)$$

$$u(x, t) = 2 - \frac{3}{2} e^{-4t} \cos(2x) \quad (2)$$

$$u(x, t) = \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-12}{\pi^2 (2k-1)^2} e^{-\left(\frac{4\pi(2k-1)}{3}\right)^2 t} \cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{3} x\right) \quad (3)$$

$$u(x, t) = 6 + 4e^{-\frac{81\pi^2}{4} t} \cos\left(\frac{3\pi}{2} x\right) \quad (4)$$

$$u(x, t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-8}{\pi^2 (2k-1)^2} e^{-\left(\frac{3\pi(2k-1)}{2}\right)^2 t} \cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2} x\right) \quad (5)$$

משוואת הגלים:

שאלות:

(1) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת הגלים הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(x, 0) = \frac{1}{2} \sin(\pi x) - 7 \sin(5\pi x) \\ u_t(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 \end{cases}$$

(2) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת הגלים הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(x, 0) = 1 \\ u_t(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 \end{cases}$$

(3) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת הגלים הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(x, 0) = -2x - 1 \\ u_t(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 \end{cases}$$

תשובות סופיות:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \cos(\pi t) \sin(\pi x) - 7 \cos(5\pi t) \sin(5\pi x) \quad (1)$$

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2k-1)} \cos(\pi(2k-1)t) \sin(\pi(2k-1)x) \quad (2)$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{3(-1)^n - 1}{\pi n} \cos(2\pi n t) \sin(\pi n x) \quad (3)$$